BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2024 - 2025
**ĐỀ THI CHÍNH THỨC** Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi thứ nhất: 25/12/2024
Đề thi gồm 01 trang, 03 câu
**Câu 1** (7,0 điểm)
Xét đa thức $P(x)=x^{4}-x^{3}+x.$
a) Chứng minh rằng với mọi số dương $a$, đa thức $P(x)-a$ có duy nhất một nghiệm dương.
b) Xét dãy số $(a\_{n})$ được xác định bởi $a\_{1}=\frac{1}{3}$ và với mọi $n\geq 1$, $a\_{n+1}$ là nghiệm dương của đa thức
$P(x)-a\_{n}$. Chứng minh rằng dãy $(a\_{n})$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
**Câu 2** (7,0 điểm)
Với mỗi số nguyên $n\geq 0$, đặt $u\_{n}=(2+\sqrt{5})^{n}+(2-\sqrt{5})^{n}$.
a) Chứng minh rằng $u\_{n}$ là số nguyên dương với mọi $n\geq 0$. Khi $n$ thay đổi, số dư của $u\_{n}$ khi chia cho
24 lớn nhất bằng bao nhiêu?
b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a,b)$ với $a,b$ nhỏ hơn 500 sao cho với mọi $n$ lẻ ta có
$u\_{n}=a^{n}-b^{n}$ (mod 1111).
**Câu 3** (6,0 điểm)
Cho tam giác nhọn không cân $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và có trực tâm $H$. Đường thẳng $AH$ cắt
lại $(O)$ tại điểm $D$ khác $A$. Gọi $E$ và $F$ tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng $AB$ và $AC$. Đường
thẳng đi qua $H$ và vuông góc với $HF$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $K$.
a) Đường thẳng $DK$ cắt lại $(O)$ tại điểm $Y$ khác $D$. Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng $BY$
và đường trung trực của đoạn thẳng $BK$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $OFY$.
b) Đường thẳng đi qua $H$ và vuông góc với $HE$ cắt đường thẳng $BC$ tại điểm $L$. Đường thẳng $DL$
cắt lại $(O)$ tại điểm $Z$ khác $D$. Gọi $M,N$ và $P$ tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng
$(BZ,OE),(CY,OF)$ và $(BY,CZ)$. Gọi $T$ là giao điểm của cặp đường thẳng $(YZ,MN)$ và $d$ là
đường thẳng đi qua $T$ và vuông góc với $OA$. Chứng minh rằng $d$ đi qua trung điểm của đoạn thẳng $AP$.

\* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
\* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.