BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2024 - 2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi thứ hai: 26/12/2024
Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

**Câu 4** (7,0 điểm)
Cho tam giác nhọn không cân $ABC$ có các đường cao $AD,BE,CF$ với $D\in BC,E\in CA$ và $F\in AB$. Gọi $H,O$ và $I$ tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $ABC,M,N$ và $P$ tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng $BC,CA$ và $AB$. Gọi $X,Y$ và $Z$ tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AI,NP),(BI,PM)$ và $(CI,MN)$.
a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AXD,BYE,CZF$ có hai điểm chung nằm trên đường thẳng $OH$.
b) Các đường thẳng $XP,YM$ và $ZN$ tương ứng cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AXD,BYE$ và $CZF$ tại các điểm $X',Y'$ và $Z'$ ($X'\ne X,Y'\ne Y,Z'\ne Z$). Gọi $J$ là điểm đối xứng của $I$ qua $O$. Chứng minh rằng $X',Y'$ và $Z'$ cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng $HJ$.

**Câu 5** (7,0 điểm)
Cho một bảng ô vuông $3k×3k$ ($k$ là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô $(i,j)$ nằm trên cột thứ $i$ từ trái qua phải và trên hàng thứ $j$ từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt $4k$ viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
• Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;
• Mỗi viên bị nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bị khác.
a) Xét $k=1$. Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên?
(Hai cách đặt bị được coi là khác nhau nếu có một ô $(i;j)$ có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)
b) Xét $k\geq 1$ tổng quát. Xác định số tự nhiên $N$ lớn nhất sao cho với mọi cách đánh dấu $N$ ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong $N$ ô đã được đánh dấu.

**Câu 6** (6,0 điểm)
Cho $a,b,c$ là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^{3}+4bc}+b+c+\sqrt{3b^{3}+4ca}+c+a+\sqrt{3c^{3}+4ab}+a+b\geq 9.$$

HẾT

Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
\* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.