BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA  
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG  
NĂM HỌC 2024 - 2025  
ĐỀ THI CHÍNH THỨC Môn: TOÁN  
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)  
Ngày thi thứ hai: 26/12/2024  
Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

**Câu 4** (7,0 điểm)  
Cho tam giác nhọn không cân có các đường cao với và . Gọi và tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác và tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng và . Gọi và tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng và .  
a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác có hai điểm chung nằm trên đường thẳng .  
b) Các đường thẳng và tương ứng cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác và tại các điểm và (). Gọi là điểm đối xứng của qua . Chứng minh rằng và cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng .

**Câu 5** (7,0 điểm)  
Cho một bảng ô vuông ( là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô nằm trên cột thứ từ trái qua phải và trên hàng thứ từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:  
• Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;  
• Mỗi viên bị nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bị khác.  
a) Xét . Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên?  
(Hai cách đặt bị được coi là khác nhau nếu có một ô có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)  
b) Xét tổng quát. Xác định số tự nhiên lớn nhất sao cho với mọi cách đánh dấu ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong ô đã được đánh dấu.

**Câu 6** (6,0 điểm)  
Cho là các số thực không âm thỏa mãn . Chứng minh rằng

HẾT

Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;  
\* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.